

# La Teoría Matemática de la Música y su Impacto en la Enseñanza de Ambas Disciplinas



Dra. Mariana Montiel 2024



# Antecedentes

- Los antiguos griegos y la pregunta de **Pitágoras**: ¿por qué la razón entre enteros pequeños se traduce en consonancia?

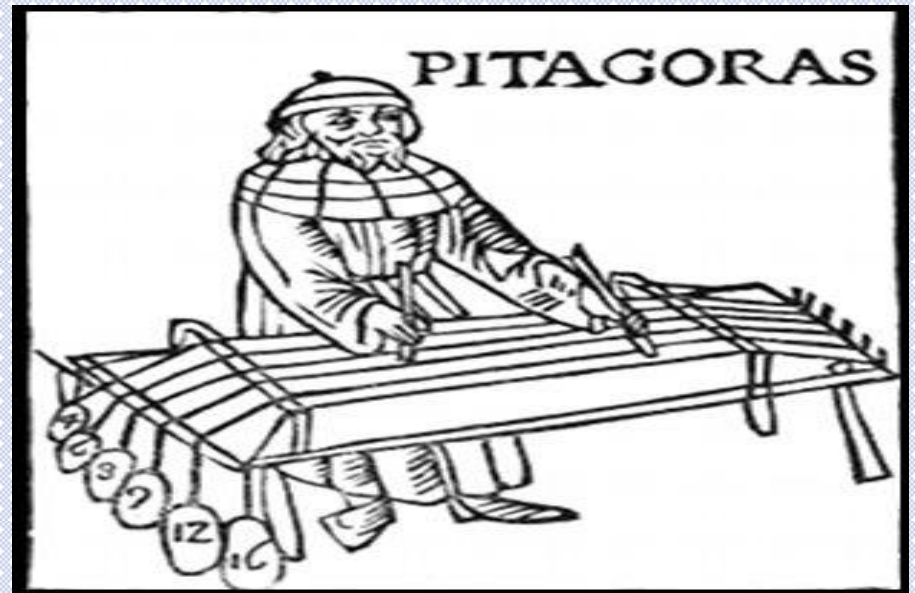
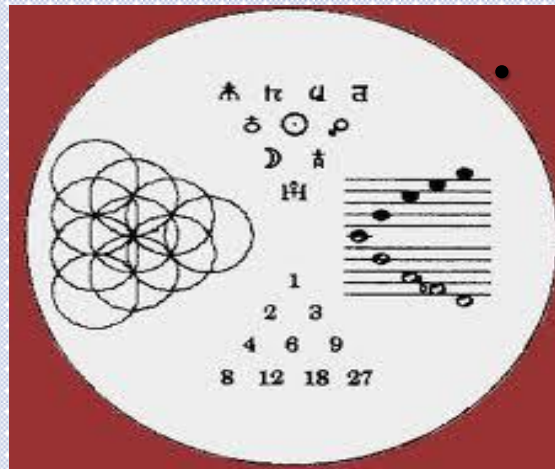


Ilustración que muestra a Pitágoras ejecutando experimentos con armónicos, a través de cuerdas vibrantes estiradas. De Franchino Gafori, *Theorica Musice* (1492)

- La respuesta, de parte de **Hermann von Helmholtz** llegó después de muchos siglos, en términos del **análisis de Fourier** y la **serie armónica**.



George Reisch's sixteenth-century engraving showing Pythagoras using a medieval counting board to form the numbers 1,241 and 82 (right) while Boethius calculates using the Indian numerals we are familiar with today (left). In the center is Arithmetic, with the two geometric progressions 1,2,4,8, and 1,1,2,2,7 appearing on her desk.



El **Quadrivium**—el currículo clásico—compuesto de las cuatro artes liberales: **La Aritmética (número), La Geometría, La Música y La Astronomía.**

- Se estudió desde la **Antigüedad** hasta el **Renacimiento** como una forma de vislumbrar la naturaleza de la realidad.
- **La Geometría es el *número en el espacio*; La Música es el *número en el tiempo*; y la Astronomía expresa el *número en el espacio y el tiempo*.**
- En los tiempos antiguos, medievales y del renacimiento, **decir que el orden del universo era “musical”, era afirmar que se podía *expresar en términos matemáticos*.**



$$f_i^{12} = 2f$$

$$i = \sqrt[12]{2}$$



**El temprano interés científico de Newton en la música se manifestó en torno a la división matemática de la octava,** un tema que aparece por la primera vez en un cuaderno de su época universitaria



En este cuaderno de 1665, se encuentra un **estudio de los modos,** así como **comparaciones de la división de la octava basadas en logaritmos o en el temperamento igual (La teoría de la afinación).**

*Newton consideraba que la música, como tema de estudio ;debería ser impartida por el profesor de matemáticas!*



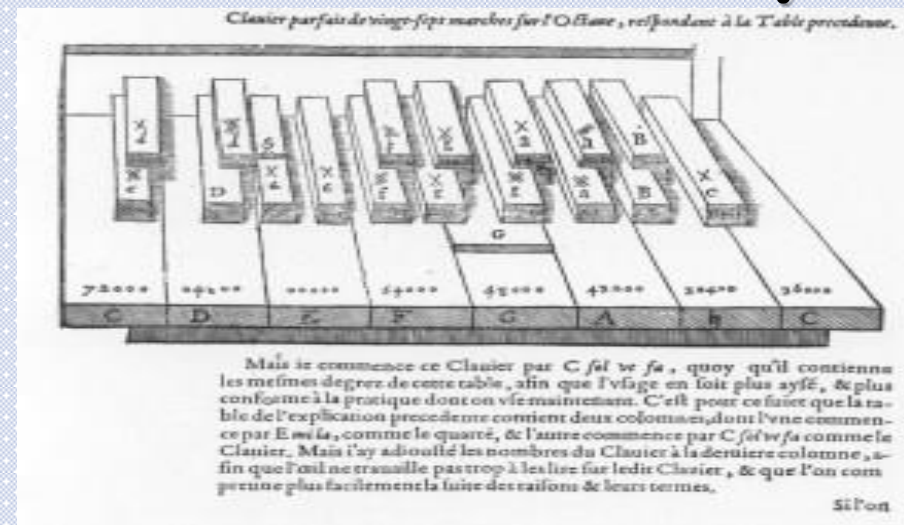
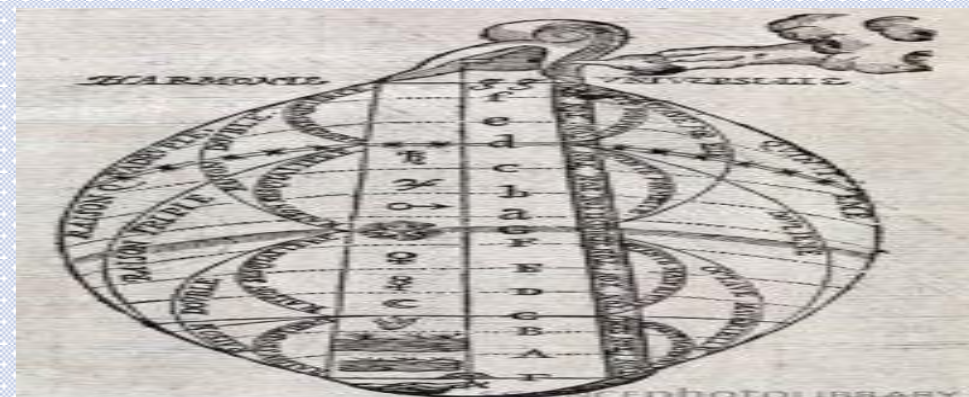
En los siglos **XVII, XVIII, XIX:**

**La física del sonido:** el estudio de *la altura de tono como razones y frecuencias;*

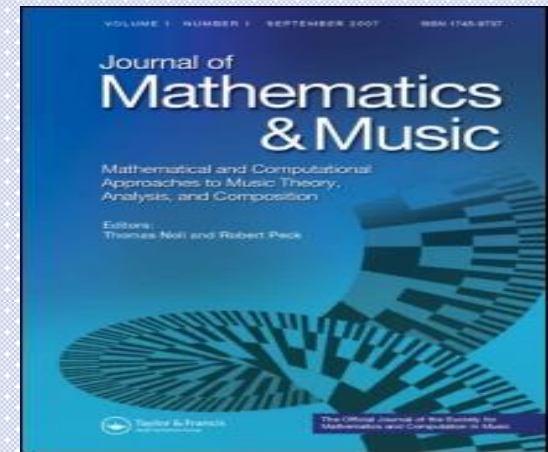
$$\ln(2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}$$

**La multi-división de la octava:**

- Euler y el uso de una representación con fracciones continuas de la razón  $\log 2 : \log 3/2$ ;
- Marin Mersenne describió una *subdivisión de 31-notas* en su *Harmonie Universelle (1636)* en la cual había 4 teclas entre fa y sol. ( $M_n = 2^n - 1$ , con n primo)



## ❖ La teoría matemática moderna de la música.



- ❖ El análisis no se restringe a frecuencias, razones y representaciones puramente físicas del sonido.
- ❖ Los patrones y las simetrías inherentes al aspect formal de la música son ejemplos reales de estructuras matemáticas abstractas, como grupos.
- ❖ En las Escuelas de Música, la necesidad de analizar los patrones de la composición moderna, que no se podían describir con las herramientas de la teoría musical tradicional y el análisis armónico, dio lugar a la Teoría Musical de Conjuntos.
- ❖ Los matemáticos también comenzaron a encontrar problemas estimulantes dentro de las aplicaciones de las matemáticas a relaciones musicales establecidas, lo cual ha llevado a *problemas abiertos interesantes en las matemáticas*.

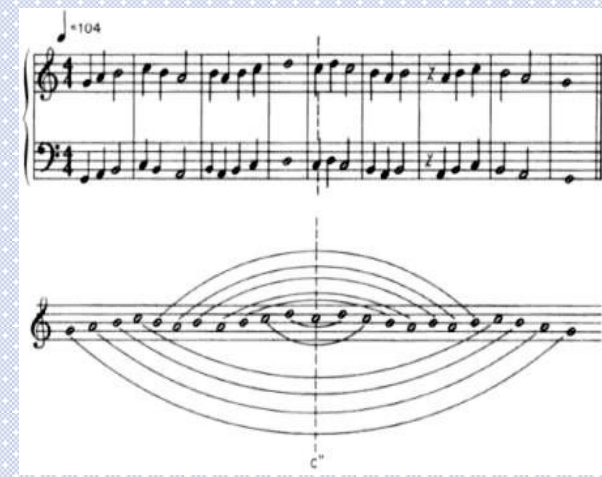
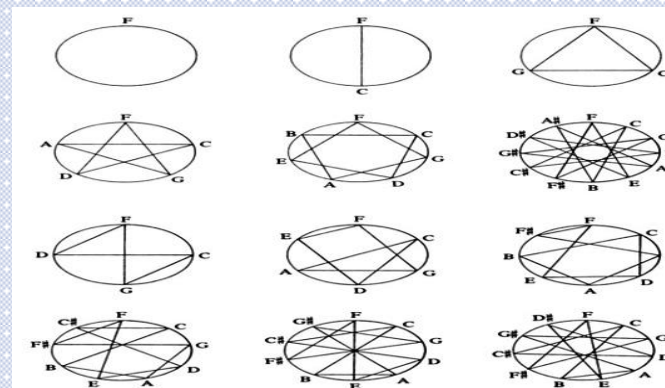


**Ejemplos que muestran cómo la investigación en la teoría matemática de la música puede dar lugar a actividades pedagógicas en ambas disciplinas:**

❖ *Escalas bien formadas.*

❖ *El estudio de la improvisación y su modelización en el jazz.*

❖ *Simetrías, teoría de grupos, teoría neo-riemanniana y ritmos euclidianos: el Taller de matemáticas y composición musical y los conciertos-conferencias.*



# De $\mathbb{Z}_{12}$ a la Escala Cromática $C_{12}$



Do - 0

Do# - 1

Re - 2

Re# - 3

Mi - 4

Fa - 5

The image shows a musical staff with a treble clef and a piano keyboard diagram below it. The staff contains a chromatic scale starting on middle C (C4) and ending on the next C (C5). The notes are labeled with letters: C, D, E, F, G, A, B, C. The piano keyboard diagram shows the corresponding keys: white keys for Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do, Re; and black keys for Do# (Reb), Re# (Mib), Fa# (Solb), Sol# (Lab), La# (Sib), and Do# (Reb).

Fa# - 6

Sol - 7

Sol # - 8

La - 9

La# - 10

Si - 11

- Como hay 12 notas en la escala cromática tradicional, usamos  $\mathbb{Z} \text{ mod } 12$  ( $\mathbb{Z}_{12}$ ). La operación es la yuxtaposición de intervalos.
- También empleamos **0 mod 12 como Do**, ya que ésta es la convención utilizada con más frecuencia. La **escala diatónica se modeliza con  $\mathbb{Z}_7$** .



The image shows a musical staff with a treble clef and a piano keyboard diagram. The staff contains a chromatic scale starting on C and ending on C. The notes are labeled C, D, E, F, G, A, B, and C. The piano keyboard diagram shows the corresponding keys: C (white), C# (black), D (white), D# (black), E (white), F (black), F# (black), G (white), G# (black), A (white), A# (black), B (white), B# (black), and C (white). The black keys are labeled with their enharmonic equivalents: Do#/Reb, Re#/Mib, Fa#/Solb, Sol#/Lab, La#/Sib, and Do#/Reb.

## Generación por semitonos (1)



The image shows a musical staff with a treble clef. The notes are: C, G, D, A, E, B, F, C#, G#, D#, A#, E#, B#. This sequence represents the circle of fifths.

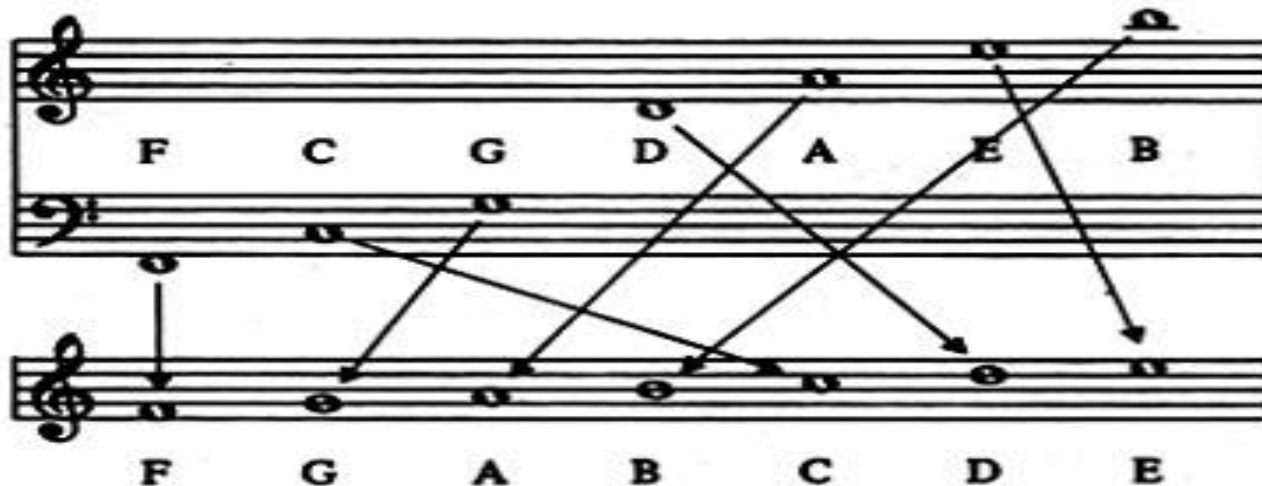
Generación de  $C_{12} (\mathbb{Z}_{12})$  por **quintas** (7) y **cuartas** (5)

# Las Escalas Bien Formadas

- Las *escalas bien formadas*, tales como la escala diatónica, se encuentran en diferentes culturas y épocas. Hay varias maneras de caracterizarlas.
- Todas las escalas bien formadas **comparten rasgos estructurales**

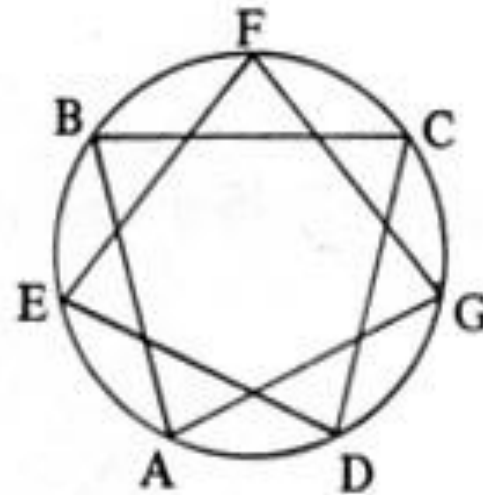
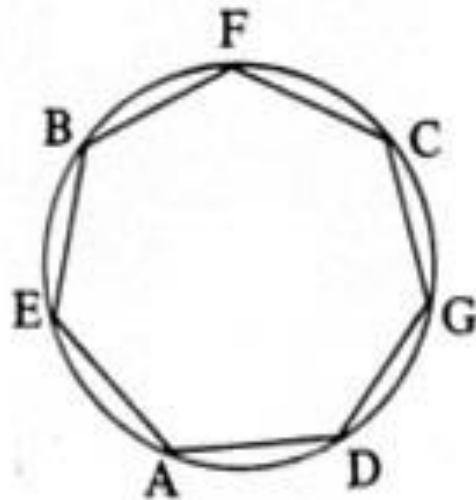
## *La condición de simetría*

- En los modos diatónicos, las siete clases de altura pueden se pueden generar por una sucesión de quintas y, después, ordenarse según el orden de la escala.

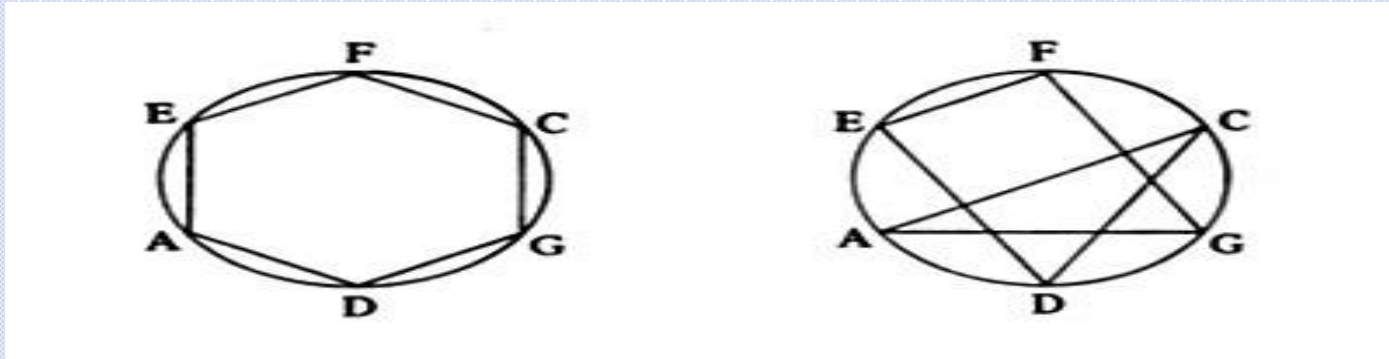




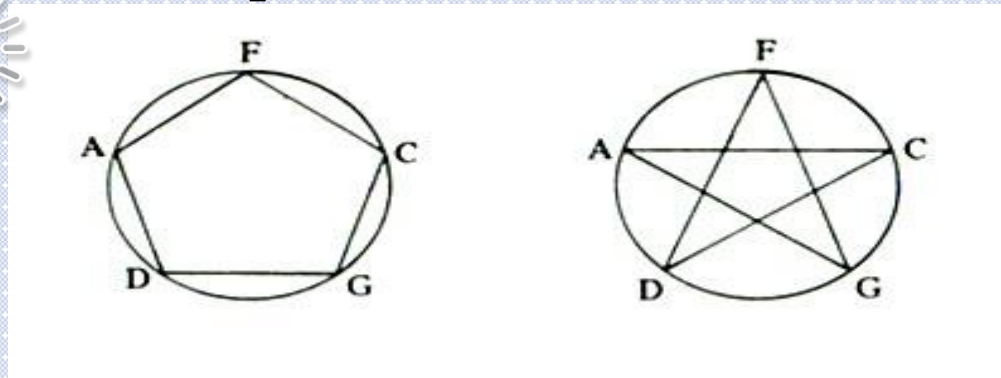
- Una explicación de porqué la escala diatónica usual se forma por siete tonos, en vez de cuatro u ocho se puede ver a través del *grado de simetría rotacional que se logra cuando se arreglan los tonos en un círculo.*



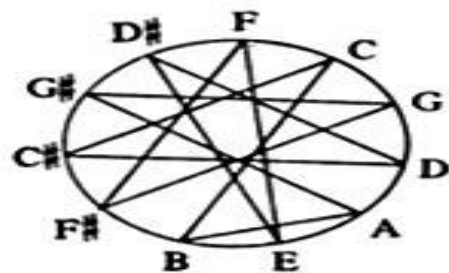
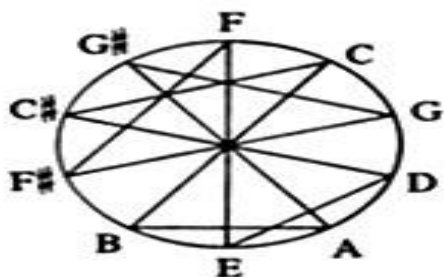
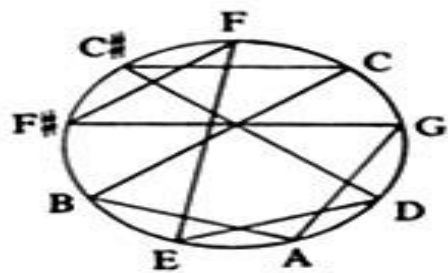
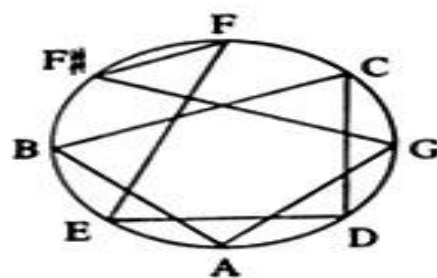
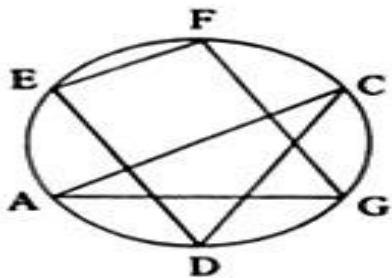
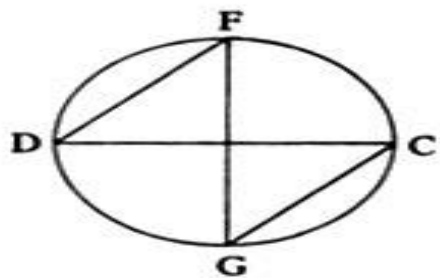
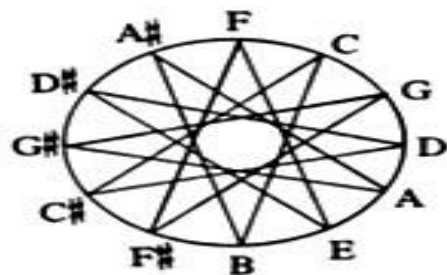
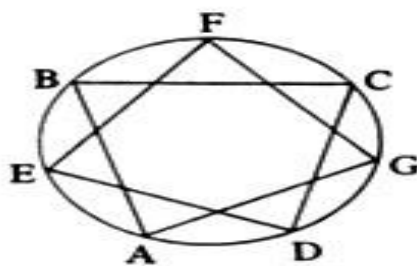
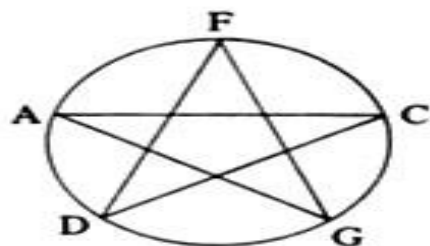
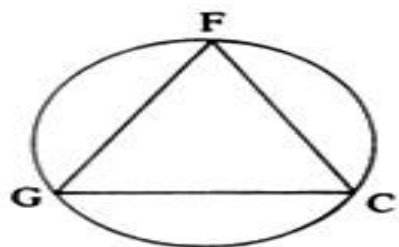
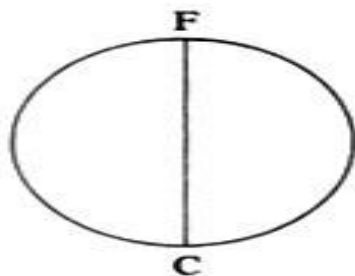
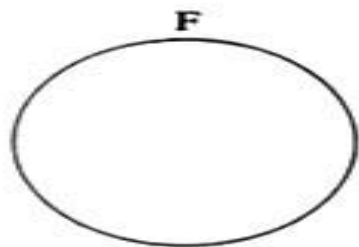
- No todas las escalas preservarán la simetría. Cualquier número de quintas se puede representar a través de un polígono regular, tal como muestra el hexacordo diatónico.
- *Sin embargo, cuando se conectan los tonos en el orden de la escala, se pierde la preservación de la simetría rotacional.*



- *La escala pentatónica preserva la simetría rotacional.*











- Así es que, **la preservación de la simetría rotacional en la escala diatónica se puede representar algebraicamente.** La multiplicación por  $2 \bmod 7$  reorganiza el orden de quintas al orden de la escala.

	0	1	2	3	4	5	6	<b>Orden de la generación por quintas</b>
$\times 2_{\bmod 7}$	0	2	4	6	1	3	5	<b>Orden de la generación por segundas</b>

- Resulta que para cada escala bien formada de  $n$  tonos en  $\mathbb{Z}_n$ , existe un elemento  $b$  en  $\mathbb{Z}$  que reorganiza el orden de quintas al de la escala.

# Escalas de $n$ notas cromáticas, $k$ notas “diatónicas”

- *Por ejemplo, como  $Z_{12} \approx Z_3 \times Z_4$ , una división natural sería 20, porque  $Z_{20} \approx Z_4 \times Z_5$ .*



<u>Chromatic</u>	<u>Scale</u>	<u>Frequencies</u>	<u>Z<sub>20</sub></u>
0	C <sub>4</sub>	261.63	
1	D <sup>b</sup>	270.856362	
2	D	280.408091	
3	E <sup>b</sup>	290.296661	
4	E	300.533951	
5	F <sup>b</sup>	311.132257	
6	F	322.104313	
7	G <sup>b</sup>	333.463297	
8	G	345.222855	
9	H	357.397112	
10	I <sup>b</sup>	370.000694	
11	I	383.048741	
12	J <sup>b</sup>	396.556925	
13	J	410.541475	
14	K <sup>b</sup>	425.019189	
15	K	440.07458	
16	A <sup>b</sup>	455.524288	
17	A	471.588317	
18	B <sup>b</sup>	488.218843	
19	B	505.435843	
	C <sub>5</sub>	523.26	

Escala Diatónica: {0,2,4,6,8,9,11,13,15,17,19}

{C,D,E,F,G,H,I,J,K,A,B}

Hay 11 modos diatónicos.



9	1	5	9	1	5	9	1	5	9	1	5	9	1	5
6	10	2	6	10	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	2	6	10	2	6	10	2
3	7	11	3	7	<b>11</b>	3	7	11	3	7	11	3	7	11
0	4	8	0	4	<b>8</b>	0	4	8	0	4	8	0	4	8
9	1	5	9	1	5	9	1	<b>5</b>	9	1	5	9	1	5
6	10	2	6	10	2	<b>6</b>	<b>10</b>	2	6	10	2	6	10	2
3	7	11	3	7	11	3	7	11	3	7	11	3	7	11
0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
9	1	5	9	1	5	9	1	5	9	1	5	9	1	5
6	10	2	6	10	2	6	10	2	6	10	2	6	10	2
3	7	11	3	7	11	3	7	11	3	7	11	3	7	11

$$\mathbb{Z}_{12} \approx \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

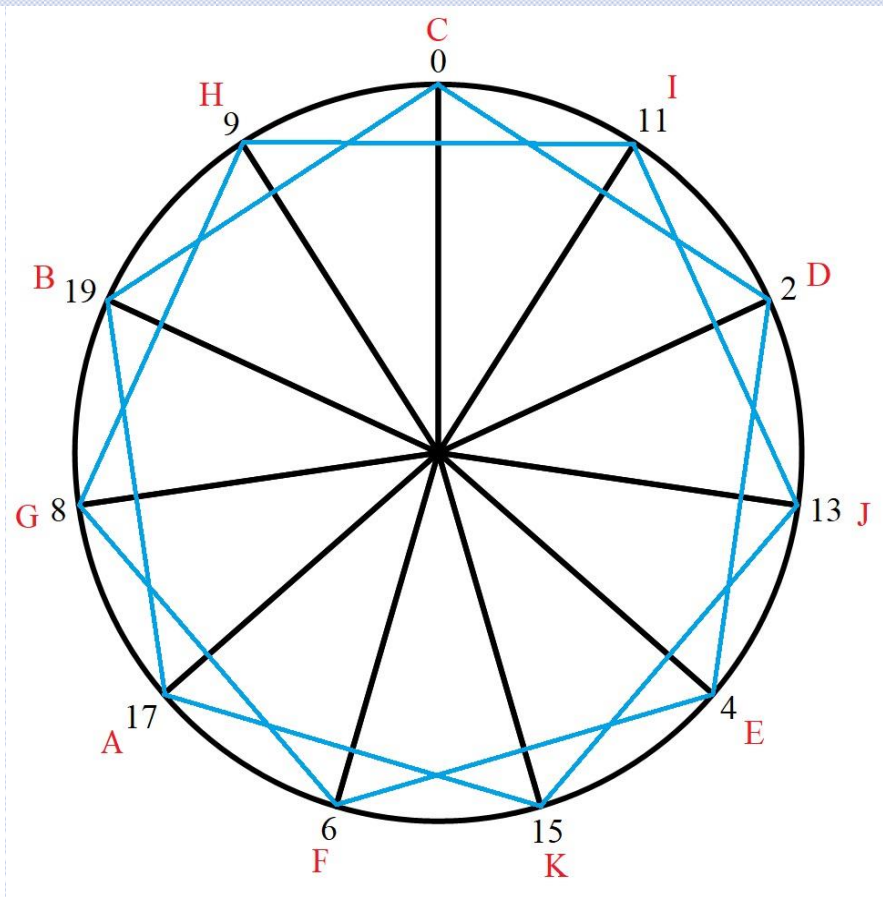
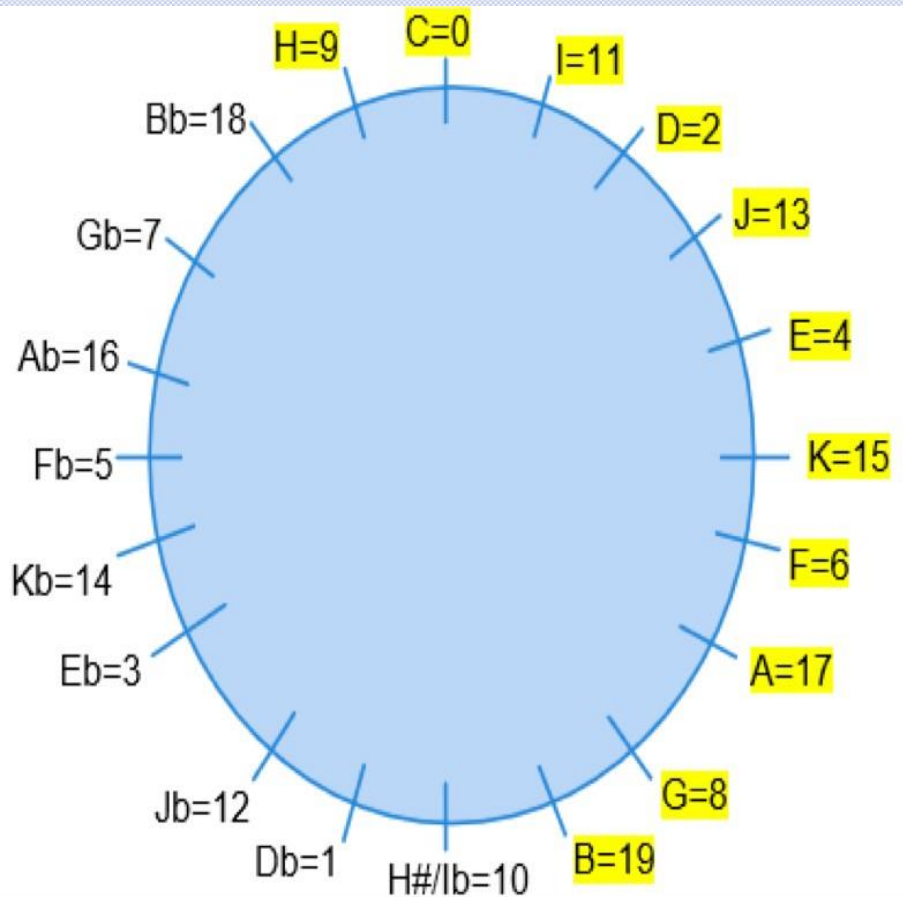
$$\mathbb{Z}_{20} \approx \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$$

0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14
0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	<b>18</b>	<b>3</b>	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	<b>14</b>	<b>19</b>	4	9	14	19	4	9	14
0	5	10	15	0	5	<b>10</b>	<b>15</b>	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	<b>18</b>	<b>3</b>	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14

- *Asimismo, tal y como 7 es un generador de  $Z_{12}$ , 11 es un generador de  $Z_{20}$ ;*
- *por otro lado, de la misma manera en que  $7 = \frac{12}{2} + 1$  tenemos que  $11 = \frac{20}{2} + 1$ . Podemos hablar de una “escala diatónica generalizada” y un “círculo de quintas generalizado”*











# Composición



## Ejercicio:

- Toma otras combinaciones de escalas ( $n$  notas cromáticas,  $k$  notas diatónicas) y crea escalas bien formadas utilizando la representación algebraica.
- Muestra que tus escalas cumplen con la propiedad de simetría rotacional y contrástalas con escalas “no bien formadas” (por ejemplo, “la escala de tonos” con 10 notas en  $Z_{20}$ ).
- Usar C-sound u otro *software* para la representación auditiva.

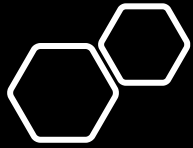
**¿Cómo podemos relacionar la investigación en la Teoría Matemática de la Música con “temas candentes” en la Informática, tales como la Inteligencia Artificial, el Aprendizaje Automático o las Redes Neuronales?**



## Modelizando la Improvisación en el Jazz

- ❖ La improvisación en el jazz es prototípica de los procesos inherentes al *Sistema del Reconocimiento del Habla* y otras áreas de interés de la Inteligencia Artificial.
- ❖ En un período de tiempo reducido hay que tomar decisiones en el contexto de una estructura dada.
- ❖ Por este motivo la modelización de la improvisación en el jazz es de interés en áreas tan diversas como *la teoría cognitiva, la informática, las matemáticas, la estadística, la neurociencia, la educación musical, etc.*

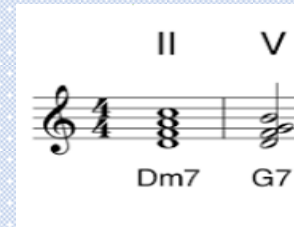




## Dos teorías cognitivas encontradas

- ❖ **Los esquemas mentales pueden derivarse de una biblioteca de patrones.** (Pressing, 1988)
- ❖ **En lugar de patrones, se enfatizan métodos basados en reglas.** (Johnson-Laird, 2002)
- ❖ **Muchos modelos que imitan la improvisación humana caen exclusivamente en una de estas categorías.**

# Modelos basados en Reglas



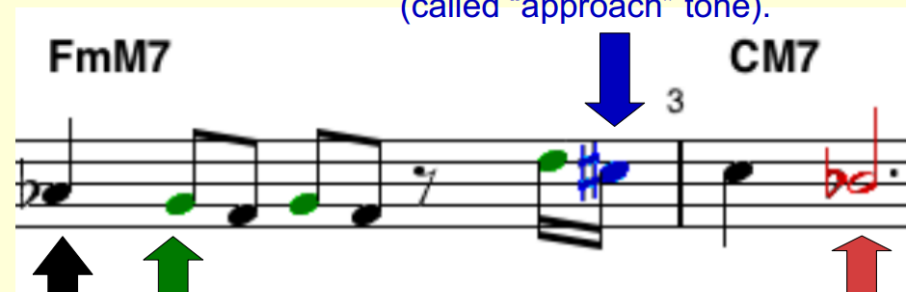
- **Impro-Visor**

# Impro-Visor



## Four Note-Color Significance

**Blue:** Half-step away from chord or color (called "approach" tone).



**Red:** None of the others ("outside").

**Green:** tone not in the chord, but sonorous with it (called "color" tone).

**Black:** tone in the chord

- *Basado en gramáticas probabilísticas*

- *Contornos*



❖ **En un estudio previo las dos teorías cognitivas encontradas fueron explorados a través del análisis de un corpus de improvisaciones del grande de jazz, Charlie Parker.**

❖ **El estudio mostró el uso extensivo de patrones, apoyando la teoría de que los jazzistas desarrollan una biblioteca de patrones que sirven como base para nuevas improvisaciones.**



# Modelo de Patrones Melódicos

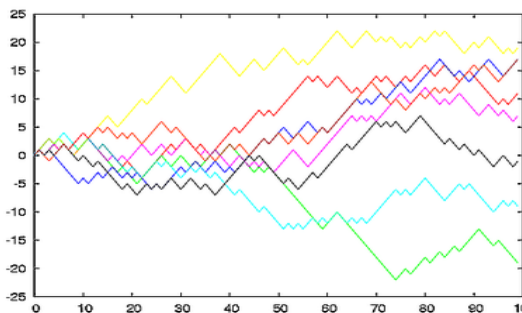
- ❖ Se compila una lista de patrones únicos.
- ❖ El patrón se define por 4 intervalos contiguos.
- ❖ Se construye una matriz estocástica que refleja las transiciones entre patrones.
- ❖ Se realiza una caminata aleatoria sobre la matriz estocástica.

## Obtain List of Unique Patterns

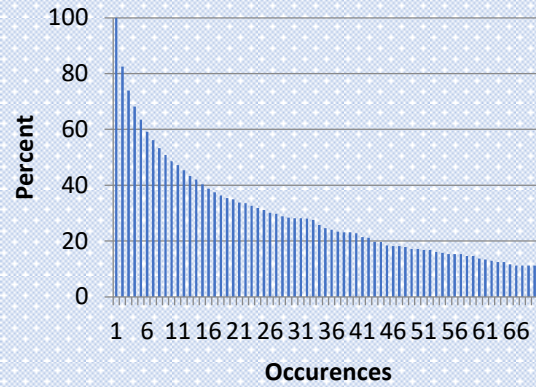
6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
0	2	4	5	7	8	0	1	3	5	6	8		
	2	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2		
	1	2	3	2	3	4	5	1					

PATTERN NUMBER:	1	2	3	4	5
PATTERN SEQUENCE :	2	2	1	2	1
	2	1	2	1	2
	1	2	1	2	2
	2	1	2	2	1

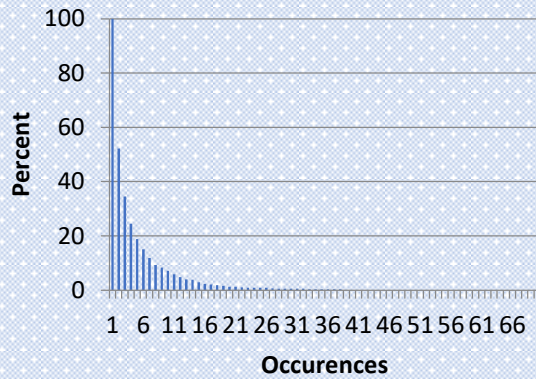
1 2 3 2 3 4 5 1



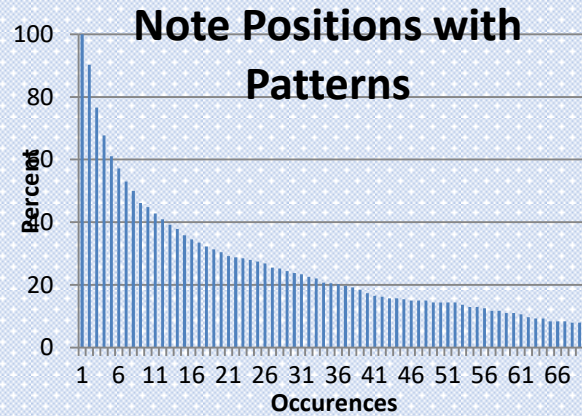
	1	2	3	4	5
1	0	0.5	0	0.5	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0.5	0	0.5	0
4	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0



*The percentage of notes that start a four-interval pattern as a function of the number of times the pattern occurs in the corpus.*



*The percentage of notes that start a four-interval pattern as a function of the number of times the pattern occurs in the computer-generated corpus.*



*The percentage of notes that start a four-interval pattern as a function of the number of times the pattern occurs in an improvisation created with our melody algorithm.*



## Testing Cognitive Theories by Creating a Pattern-Based Probabilistic Algorithm for Melody and Rhythm in Jazz Improvisation

Martin Norgaard, Jonathan Spencer, and Mariana Montiel  
Georgia State University

Building on previous work, which suggests that jazz improvisers insert patterns stored in procedural memory, a probabilistic model based on patterns from a corpus of Charlie Parker solos was developed and implemented. In previous analysis, patterns were detected in the corpus in significant proportions; however, the results of a parallel control situation showed minimal patterns. The control improvisation was generated by software based on grammars and contours, coincident with the cognitive position that emphasizes learned rule-based procedures in improvisation, as opposed to stored patterns. The present pattern-based improvisations, using our model, have graphs that coincide significantly with the actual human improvisation. Though briefly described earlier (Norgaard, Montiel, & Spencer, 2013), the current article expands the theoretical foundation and adds methods for evaluating our algorithm using interval distributions and alternate corpora. Specifically, we show that the algorithm is capable of generating improvisations in fiddle and classical styles, demonstrating that the pattern-based algorithm is style independent. Our model shows much promise both for future research in the cognitive underpinnings of musical improvisation as well as for the development of software based on a stylistically appropriate concatenation of actual patterns.

*Keywords:* stochastic matrix, probability, music cognition, pattern-based software, jazz improvisation

Performance of preexisting music and musical improvisation both involve learned movements. However, during musical improvisation, the exact configuration of those movements is determined

Hargreaves, 2012; MacDonald & Wilson, 2005). Pressing divided improvisations into concatenated note groupings. Each grouping is triggered by a creative intention in the form of a mental schema

## Modeling Tonal Jazz Improvisation using a Pattern-based Computer Algorithms

Jonathan Spencer, Georgia State University  
Mariana Montiel, Georgia State University  
Martin Norgaard, Georgia State University  
School of Music, Georgia State University

**Abstract:** Previous research by one of the authors suggests that jazz improvisers insert patterns stored in procedural memory into ongoing improvisations while performing. Based on these findings, the present work involves the development and implementation of a probabilistic model using patterns from a corpus of Charlie Parker solos. This pattern-based approach aligns with the theoretical framework suggested by Pressing (1988) but is less compatible with the position that learned procedures control improvisation (Johnson-Laird, 2002). In the previous work, the number of patterns in the Parker corpus was compared with artificial improvisations created using the same chords as the corpus. These artificial improvisations were carried out on software based on grammars and contours, very much in line with the cognitive position that emphasizes learned rule-based procedures in improvisation, as opposed to stored patterns. An analysis of the artificially created improvisations showed minimal use of patterns. The present pattern-based improvisations, using our model, have graphs that coincide significantly with the actual human improvisation. Our model initially analyzed melodic and rhythmic patterns separately but in the current version these two components are joined together. Currently, we can generate authentic jazz improvisations without a dependence on an underlying chord structure. In the future, chords will be incorporated, but with a very different philosophy than found in the software whose improvisations are based on rules that depend entirely on the chords.

### Modeling Jazz Improvisation

- Jazz improvisation is a prototype of the mental activity common to Speech Recognition and other areas of interest in Artificial Intelligence
- In a short amount of time decisions must be made in the context of a given structure
- This is why modeling jazz improvisation is of wide interest in areas as diverse as Cognitive Theory, Computer science, Mathematics and Statistics, Neuroscience, Music Education, etc.

### Two Competing Cognitive Theories

*Mental schemas may derive from a stored library.*

Should this theory be accurate, improvisations by artist-level improvisers should contain repeated melodic and rhythmic figures as the improviser repeatedly access the same mental schema from the stored library.

*A competing theory emphasizes learned, rule-based procedures*

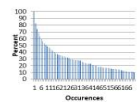
According to this explanation instead of a list of fragments of rhythms and motifs, the improvisations are based on algorithms that make use of rules.

Most software for improvisation employs:

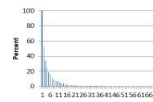
the generative approach, not the pattern approach.

In particular, when a software for jazz improvisation requires chords to generate the improvisation, it can be classified as generative.

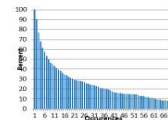
- A previous study by one of the authors explored the two competing cognitive theories by analyzing a large corpus of improvisations by jazz great, Charlie Parker
- The study showed extensive use of patterns lending support to the theory that improvisers develop a stored library of patterns serving as the basis for new improvisations.



The percentage of notes that start a four-interval pattern as a function of the number of times the pattern occurs in the corpus.



The percentage of notes that start a four-interval pattern as a function of the number of times the pattern occurs in the computer-generated corpus.



The percentage of notes that start a four-interval pattern as a function of the number of times the pattern occurs in an improvisation created with our melody algorithm.

### An inherent problem with the grammar approach

Artist-level jazz improvisers weigh both melodic (horizontal) and chordal (vertical) considerations during improvisation. Improvisers may follow the logic of the horizontal line to create material that may or may not fit the actual chords.

*Example of an improvisation created with this algorithm. Notice that at several points "quintessential" Parker rhythm and note patterns occur. ample.*



### Method

- In the previous study, transcriptions of forty-eight improvisations by Charlie Parker were included in the corpus for analysis.
- Using a procedure, in the Matlab computer environment, the number of patterns occurring on each note position was reported. A similar procedure using beat onset times was used to investigate rhythm patterns.
  - Building on this previous work we decided to find a form of concatenating pitch patterns to generate improvisations that, when analyzed, would show a close resemblance to real human improvisation
- The first step was to create a model for the melody (intervals), although it was then decided to expand the model and include rhythm, for the complete horizontal aspect.
- In the algorithm, a change in pattern was determined by deleting the first interval of the previous pattern and adding a new interval. For example, a 4-interval pattern, [2212] might be followed by [2121], with the result that the concatenated interval sequence would be [2212121]. Indeed, in this case, the following pattern was contingent upon the last 3 intervals of the preceding pattern.
- After organizing the pattern display in Matlab so that unique patterns were available in interval notation, it was decided to pilot with 4-interval (5-note) patterns

#### EXAMPLE (Melody)

- Taking the midi convention with middle C as 60, 12 notes are presented in the first row, and the 11 intervals between them, in the second row:

60	62	64	66	67	68	69	71	72	73	74	75
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

- As a next step the sequences of 4 intervals are listed, stopping at the eighth interval which will start the last possible 4-interval pattern. The 4-interval (5-note) sequences are to be read vertically. There are only 5 unique patterns.

Position	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	2	1	2	1	2	1	2
4	2	1	2	1	2	1	2	1

The five unique patterns are at the following positions: (1,8), (2,4), (3,5), 6, 7.

Then the following 5 x 5 matrix was created,

1	0	1	0	0
2	0	0	2	0
3	0	1	0	1
4	0	0	0	1
5	1	0	0	0

The 5 x 5 matrix is converted into the following stochastic matrix:

1	0	0.5	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0.5	0	0.5
4	0	0	0	1
5	1	0	0	0

# Ejemplo basada sólo en los patrones melódicos



# Patrones melódicos y rítmicos (independientes)

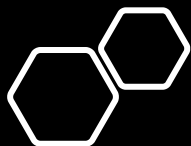
❖ Cada uno se llevó a cabo independientemente



The image displays five staves of musical notation, each containing a distinct melodic and rhythmic pattern. The notation is written in a single treble clef with a 4/4 time signature. The patterns are characterized by the use of triplets, indicated by a '3' above a bracketed group of notes. The first staff begins with a whole rest followed by a series of eighth notes in a triplet. The second staff features a mix of eighth and sixteenth notes, some grouped in triplets. The third staff includes a whole rest in the second measure, followed by eighth notes and triplets. The fourth staff is more complex, with sixteenth notes and triplets. The fifth staff is the simplest, consisting of a few notes followed by a whole rest.







# Tonos y ritmo (con relación)

**Los patrones  
interválicos y rítmicos  
solo se escogen cuando  
coinciden en el  
corpus.**



❖ *Meta de la investigación: crear un modelo generador de improvisaciones de solos de jazz a través de redes neuronales LSTM y enmarcado en el lenguaje de la teoría de categorías aplicada.*

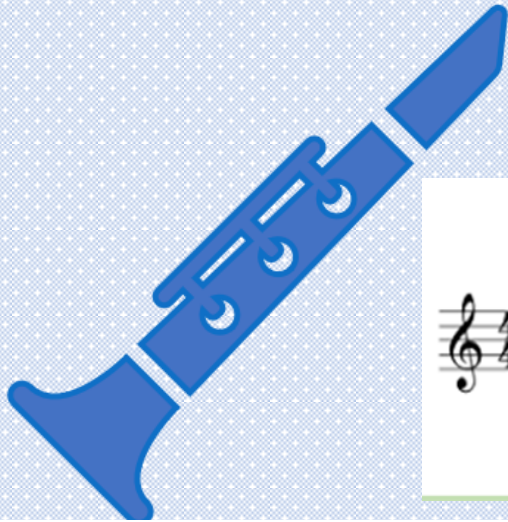
Un trabajo en curso. Hemos logrado:

- ❖ *El desarrollo de un lenguaje formal, diagramático, de redes neuronales, usando la teoría de categorías aplicada;*
- ❖ *La introducción de una arquitectura de redes neuronales para modelizar secuencias sujetas a un contexto temporal estructurado;*
- ❖ *La implementación de esta arquitectura como un modelo generador de solos de jazz.*



Una **progresión de acordes se puede ver como una secuencia de eventos que condicionan una sucesión de señales**

(las notas y los silencios)



II V

Dm7 G7

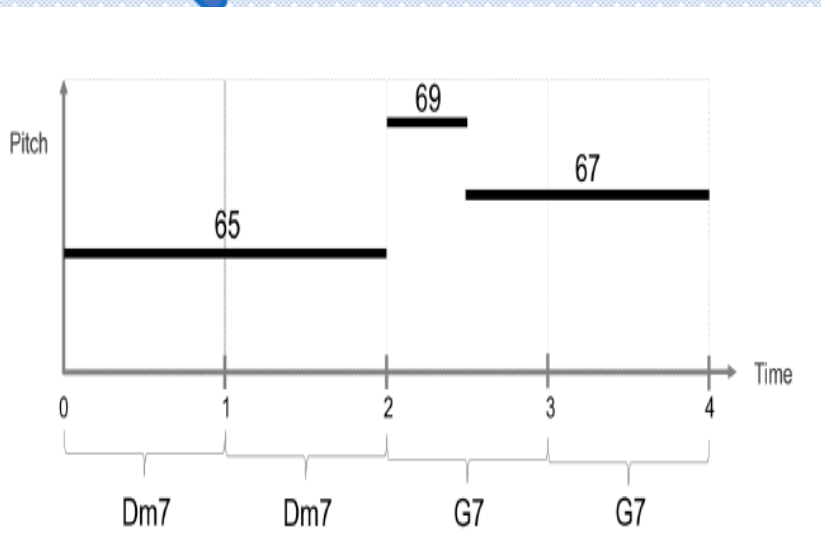
❖ **Ejemplo:**

Dm7 G7

❖ Cada *símbolo de acorde* tiene una *duración de 2 pulsos*

❖ La primera nota *F*, tiene altura de tono **65** y *duración 2*; la segunda nota *A* tiene *altura 69* y *duration 1/2*, y la tercera nota *G* tiene *altura 67* y *duración 3/2*.

❖ Por lo tanto **Podemos considerar esta frase musical como la secuencia de señales  $S = (s^0, s^1, s^1) = (65, 69, 67)$  con duración  $l^0 = 2, l^1 = 1/2, l^2 = 3/2$ , condicionada a la secuencia de eventos:  $E = (e^0, e^1, e^2, e^3) = (Dm7, Dm7, G7, G7)$ .**



- ❖ La *improvisación ininterrumpida más corta es de 4 compases* (probablemente del intercambio de cuatros - **trading 4's** - con otros músicos), mientras que *la más larga es de 131 compases*.

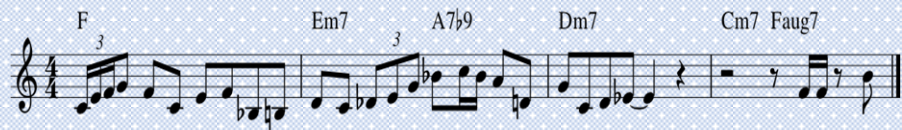
- ❖ El corpus de entrenamiento consistió en **48 transcripciones de solos de Charlie Parker**.
- ❖ Hubo una totalidad de **2479 compases de música** (sin contar los compases que solo tenían silencios).
- ❖ Decidimos que *cualquier cuatro compases completos consecutivos constituirían un ejemplo de entrenamiento*.
- ❖ En el siguiente ejemplo, el solo tiene más de 4 compases de duración. *Los compases 1-4 forman un ejemplo de entrenamiento, los compases 2-5 constituyen otro, etc.* En nuestro código nombramos estas porciones *ventanas de entrenamiento*.

The image shows a musical staff with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). The staff contains a sequence of notes with various rhythmic values. Two overlapping brackets labeled 'window 22' and 'window 23' are drawn above the staff. Window 22 spans measures 22 to 25, and window 23 spans measures 23 to 26. Above the staff, chord symbols are placed: G7 above measure 23, C above measure 25, Dm7 above measure 26, and G7 above measure 27. A triplet of eighth notes is marked with a '3' and a bracket in measure 23.



❖ Finalmente, algunas de las frases generadas que obtuvimos; fueron generadas con los mismos pesos de entrenamiento, pero son diferentes debido al proceso de muestreo.

### Frase original 1



Musical notation for original phrase 1 in 4/4 time. Chords: F, Em7, A7b9, Dm7, Cm7, Faug7. Includes a triplet of eighth notes.



### Frase original 2



Musical notation for original phrase 2 in 4/4 time. Chords: F, Em7, A7b9, Dm7, Cm7, Faug7. Includes a triplet of eighth notes.



### Frase generada 2



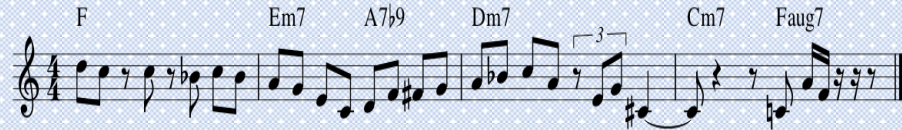
Musical notation for generated phrase 2 in 4/4 time. Chords: F, Em7, A7b9, Dm7, Cm7, Faug7. Includes a triplet of eighth notes.

### Frase original 3



Musical notation for original phrase 3 in 4/4 time. Chords: F, Em7, A7b9, Dm7, Cm7, Faug7. Includes a triplet of eighth notes.

### Frase generada 3



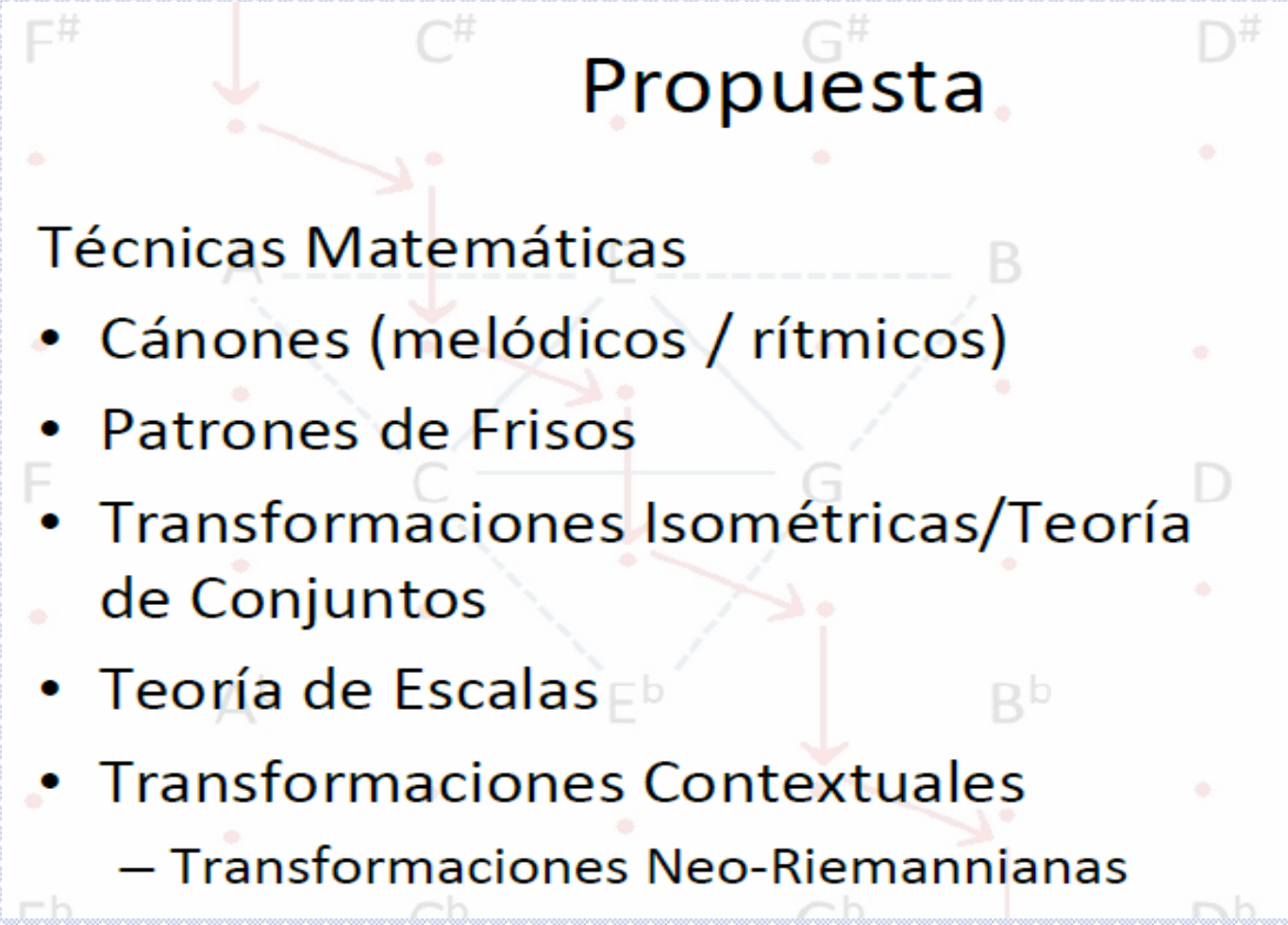
Musical notation for generated phrase 3 in 4/4 time. Chords: F, Em7, A7b9, Dm7, Cm7, Faug7. Includes a triplet of eighth notes.

- ❖ **Este tema abre muchas posibilidades para proyectos estudiantiles y el realce de cursos de matemáticas, informática y tecnología musical, así como la investigación a nivel de licenciatura y posgrado.**



### **Actividades Educativas**

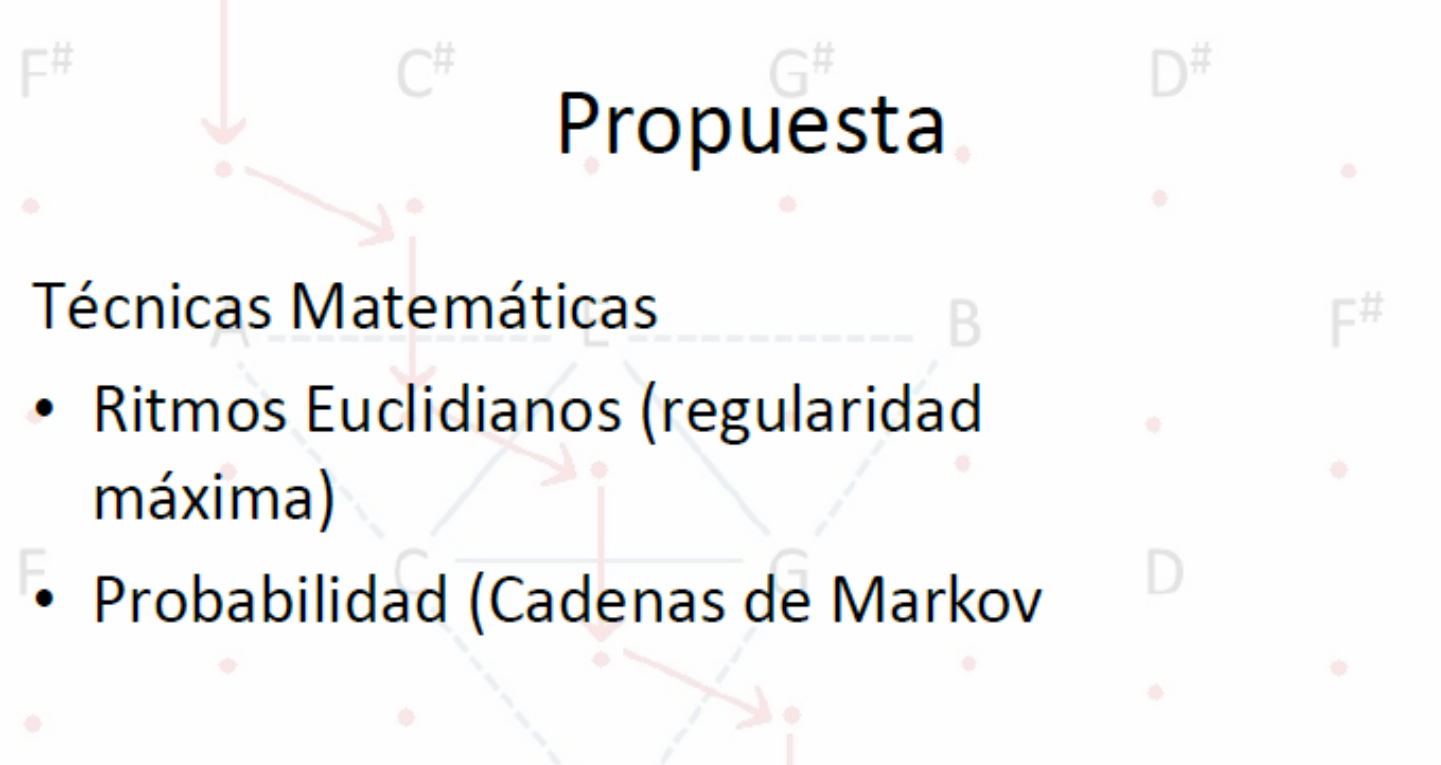
- ❖ *Utilizar otros corpuses para entrenar y generar otros estilos de jazz o géneros diferentes.*
- ❖ *Motivar el aprendizaje de Python, Pytorch*
- ❖ *Conectar las matemáticas del cálculo diferencial a la técnica del descenso del gradiente, empleada para minimizer la función de pérdida.*
- ❖ *Reforzar conceptos estadísticos.*



# Propuesta

## Técnicas Matemáticas

- Cánones (melódicos / rítmicos)
- Patrones de Frisos
- Transformaciones Isométricas/Teoría de Conjuntos
- Teoría de Escalas
- Transformaciones Contextuales
  - Transformaciones Neo-Riemannianas



## Propuesta

### Técnicas Matemáticas

- Ritmos Euclidianos (regularidad máxima)
- Probabilidad (Cadenas de Markov)



# Qué es un ritmo Euclidiano?

DEMO: <https://dbkaplun.github.io/euclidean-rhythm/>

- **Algoritmo Euclidiano**

- Una forma de encontrar el máximo común divisor de dos números enteros.
- El número más grande que divide dos enteros sin dejar un residuo.

- **Cómo se traduce a la música?**

- Aquí los números representan el número de pulsos y el número de notas.
- Tomemos 8 notas y 5 silencios (Los **1's representas notas** y los **0's son silencios**)

Ejemplo: gcd(6,33)

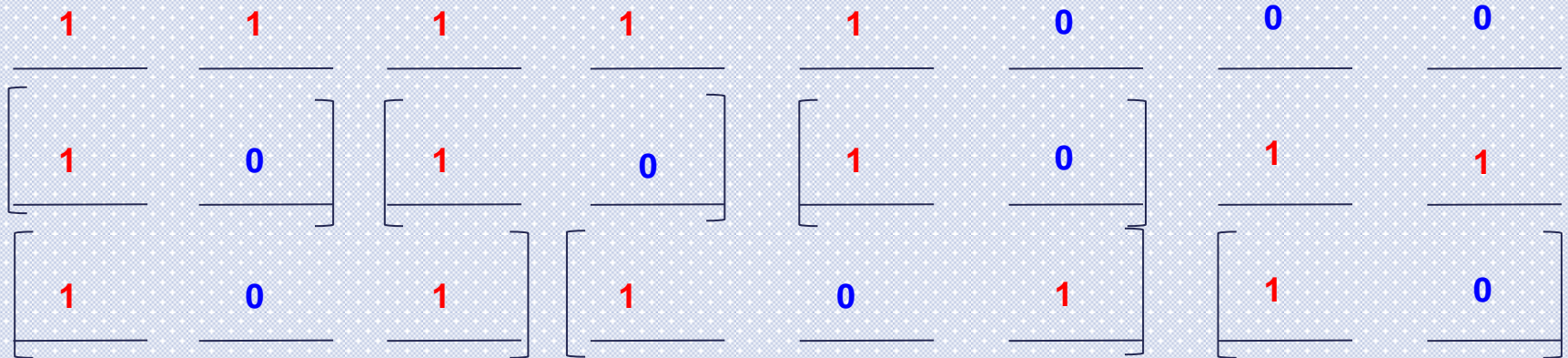
$$33=(6)(x)+r$$

$$33=(6)(5)+3$$

$$6=(3)(x)+r$$

$$6=(3)(2)+0$$

Nuestro máximo común divisor es 3





# Transformaciones NeoRiemmanianas

**Definición:** Sea  $x, Y \in M$ , donde  $x = \langle a, b, c \rangle$  es una tríada menor y  $Y = \langle A, B, C \rangle$  una tríada mayor

$$P(x) = P(\langle a, b, c \rangle) = \langle C, B+1, A \rangle$$

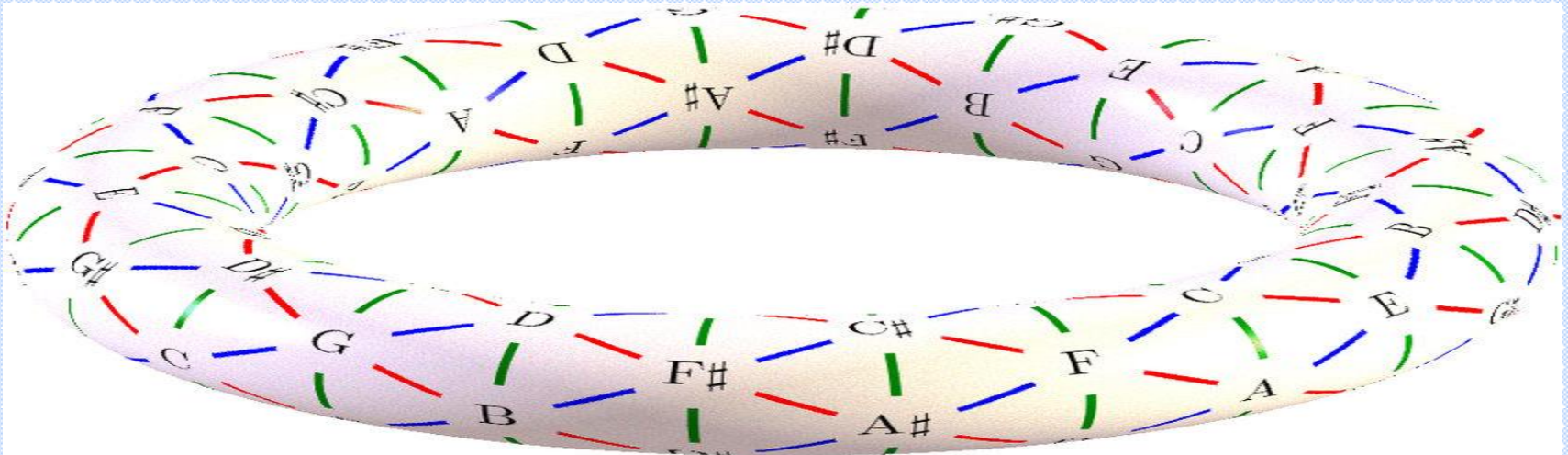
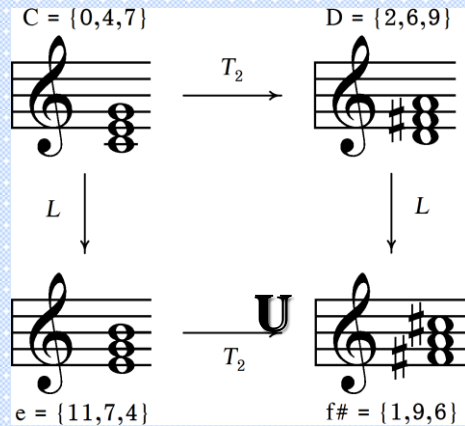
$$P(Y) = P(\langle A, B, C \rangle) = \langle c, b-1, a \rangle$$

$$L(x) = L(\langle a, b, c \rangle) = \langle A+1, C, B \rangle$$

$$L(Y) = L(\langle A, B, C \rangle) = \langle a-1, c, b \rangle$$

$$R(x) = R(\langle a, b, c \rangle) = \langle B, A, C-2 \rangle$$

$$R(Y) = R(\langle A, B, C \rangle) = \langle b, a, c+2 \rangle$$

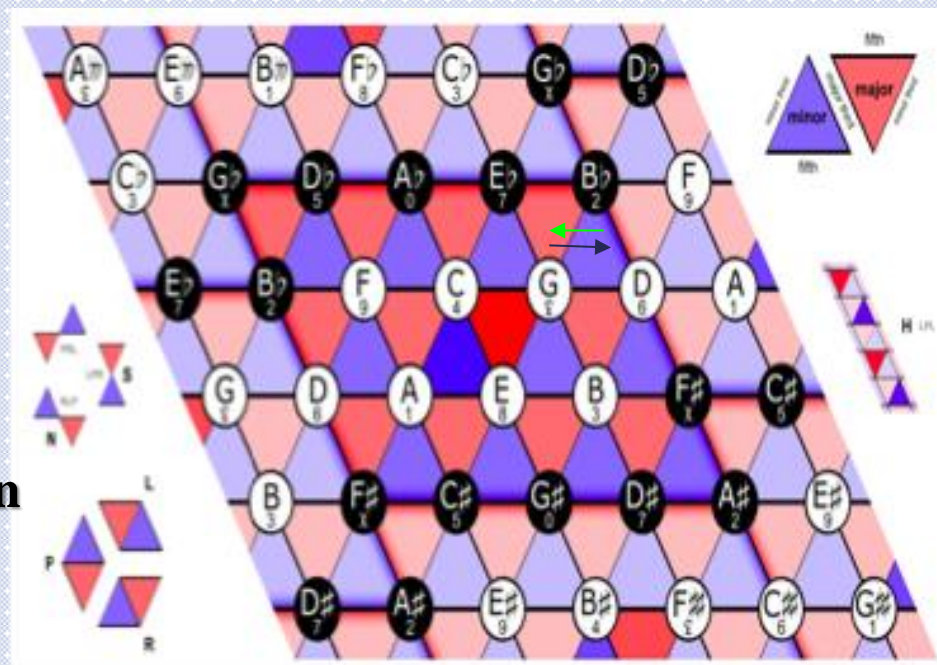


# Evolución de la pieza en el Tonnetz.

La pieza: [Lependu](#)

1. A-B-A Preludio

Un ejemplo de una transformación ejecutada en la pieza.



Grave ♩ = 120

The musical score is written in 6/8 time with a key signature of two flats (B-flat and E-flat). The tempo is marked 'Grave' with a quarter note equal to 120 beats. The score consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The treble staff contains a series of chords, with a green arrow pointing from the first chord to the second. The bass staff contains a rhythmic accompaniment of eighth notes.



A woman with long blonde hair, wearing a blue top, is standing at a podium and gesturing with her right hand. The background is a dark blue gradient with a faint, semi-transparent image of the same woman. The text is overlaid on this background.

# Neo-Riemannian Theory: Contextual Transformations

## What is a Euclidean Rhythm?

The Euclidean Rhythm was discovered in 2004 by Godfried Toussaint. It was discovered that these rhythms use the Euclidean Algorithm to form rhythm in music. One way of forming the rhythm from the Euclidean Algorithm is using Bjorklund's Algorithm. The purpose of using these algorithms is to make the beats in the rhythm as equidistant as possible.

## Bjorklund's Algorithm in our musical piece

---

In this musical piece, our musical rhythm is formed off  $E(4,9)$ . Let us find  $E(4,9)$ :

- |    |               |           |
|----|---------------|-----------|
| 1. | 1 1 1 1       | 0 0 0 0 0 |
| 2. | 1 0 1 0 1 0   | 0         |
| 3. | 1 0 1 0 1 0 0 |           |

So,  $E(4,9)=[101010100]$

Can you guys perform this rhythm?





A woman with long dark hair, wearing a light-colored top and a dark vest, is seated at a black grand piano. She is looking towards the camera. The piano is illuminated by a soft, blue light. Overlaid on the scene are two staves of musical notation. The top staff begins with a treble clef, a key signature of two flats (B-flat and E-flat), and a 4/4 time signature. It contains a melodic line with eighth and sixteenth notes. The bottom staff begins with a bass clef, the same key signature and time signature, and contains a bass line with eighth and sixteenth notes. A dynamic marking 'p' (piano) is visible in the second measure of the bottom staff. The background is dark, and the overall mood is artistic and focused.

# Música de Arpa de los Nzakara del África Central

## Estructura

- ▶ Se fijan límites en torno a las dos notas tocadas simultáneamente.
- ▶ No se pueden tocar la primera y la última cuerdas de manera simultánea.
- ▶ No se pueden tocar “bicordes” en cuerdas adyacentes.
- ▶ Sólo hay 5 posibilidades.

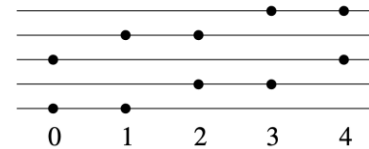
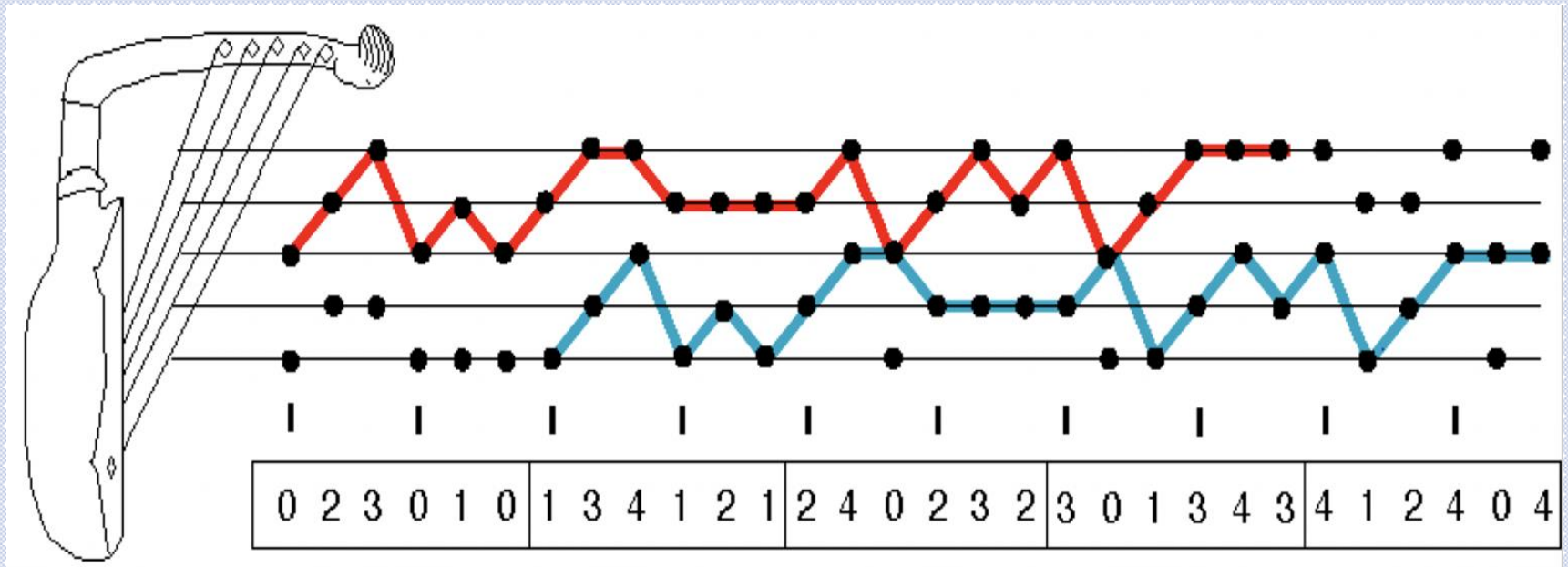


Figure 1: The five allowable bichords of the Nzakara harpists

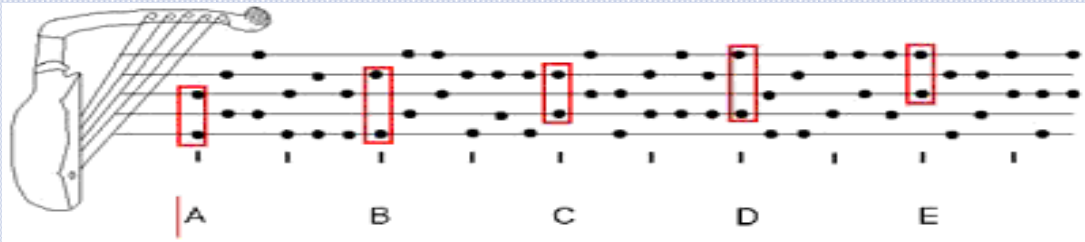
## *Cánones de Limanza*

- ❖ Una de las propiedades más emblemáticas de la secuencia es que los fragmentos melódicos (resaltados en rojo y azul) forman un canon y, a la vez, crean la estructura armónica de la tradición.
- ❖ Nótese que las distancias entre las notas superiores de los primeros seis “bicordes” son las mismas que de las de las notas inferiores en el segundo grupo de seis.



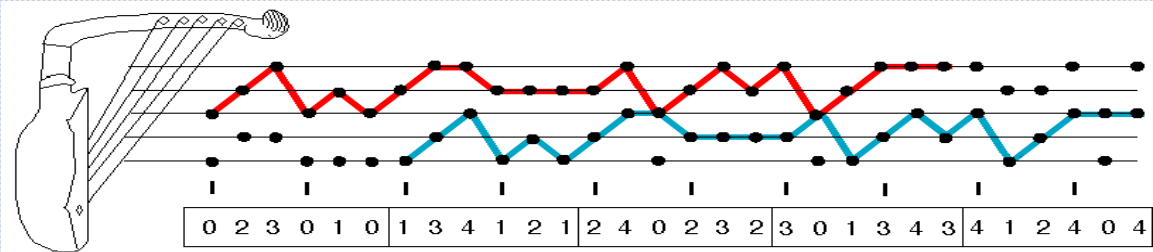
# Considérese un subconjunto del producto Cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ;

Se restringe a las cinco combinaciones de cuerdas tocadas simultáneamente por los músicos Nzakara;



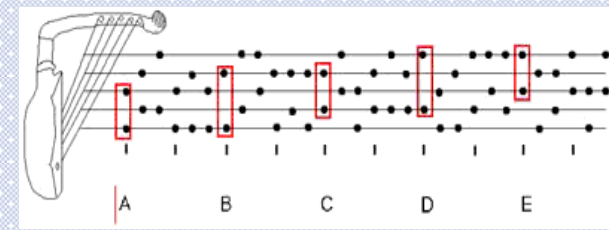
Denotamos estas combinaciones como enteros:  $0 = (c1, c3)$ ,  $1 = (c1, c4)$ ,  $2 = (c2, c4)$ ,  $3 = (c2, c5)$  and  $4 = (c3, c5)$

Así, el alfabeto se representa por el conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , que identificamos con el grupo  $\mathbb{Z}_5$ .



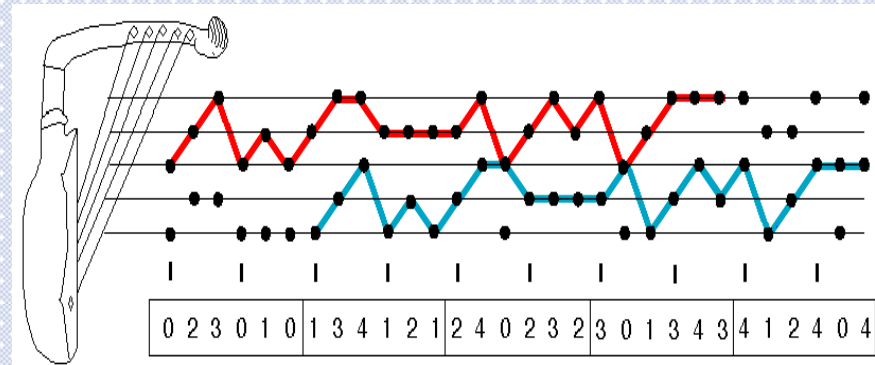


# Sucesiones de Diferencia



- El canon puede factorizarse en cinco palabras:  $w = v_0v_1v_2v_3v_4$ , cada una obtenida de la previa a través de la suma del mismo valor a sus elementos, hasta alcanzar la palabra original de nuevo.

$v_0 = 0\ 2\ 3\ 0\ 1\ 0,$   
 $v_1 = 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 1,$   
 $v_2 = 2\ 4\ 0\ 2\ 3\ 2,$   
 $v_3 = 3\ 0\ 1\ 3\ 4\ 3,$   
 $v_4 = 4\ 1\ 2\ 4\ 0\ 4.$

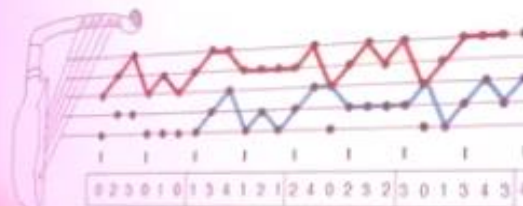


Por ejemplo, se agrega 1 a la primera palabra para obtener la segunda

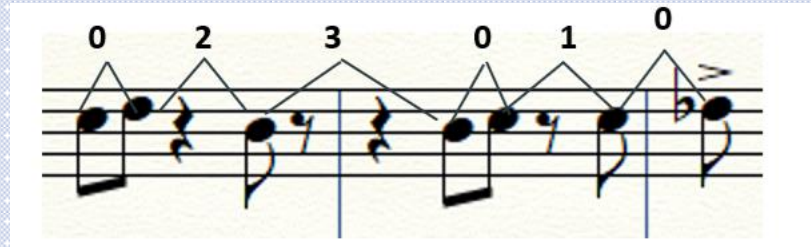
Ésta es la construcción general en el repertorio de la tradición Nzakara

## Limanza Canon (cont.)

Richard patterns made in this fashion have a property of creating  
all shown below. Note that the distances between the upper notes  
six chords are the same distances between the lower notes in the



# Realización Rítmica



- Decidí realizar la sucesión *rítmicamente* y no sólo melódicamente. El espacio entre las notas se determinaron por los números en la secuencia.
- El proceso crea un motivo de 15 compases en  $\frac{3}{4}$ . Se repite en el transcurso de la pieza con varias alteraciones, un poco como “tema y variaciones”.

# Realización de la Melodía

► Los valores numéricos se transformaron en valores de altura de tono a través del uso de cada parte del patrón repetitivo:

► + 0 + 2 - 3 - 0 + 1 - 0  
+ 1 + 3 - 4 - 1 + 2 - 1 ...

► Utilizando C como el punto de partida el material que resulta es:

C	D	B	B	C	C
C#/Db	E	C	B	C#/Db	C
D	F#/Gb	F#/Gb	E	G	F
G#/Ab	G#/Ab	G	E	G#/Ab	F
A	A#/Bb	G#/Ab	E	E	C



**Finalmente, cada compás en el motivo de 15 compases se transpone según la idea previa:**

**( +, +, -, -, +, - )- las sucesiones de diferencia**

The image displays two staves of musical notation. The top staff shows a 6-measure motif. The bottom staff shows the same motif transposed according to the interval differences listed below. Blue arrows point from the original notes to the transposed notes, with numerical values indicating the interval change.

Measure	Interval Difference
1	+0
2	+2
3	-3
4	-0
5	+1
6	-0

Full Score

# Triptoe Waltz

written for the Math and Music Conference 2019

Ian Hardemon

Alto Sax 1

Alto Sax 2

Tenor Sax

A. Sax. 1

A. Sax. 2

T. Sax.



**¡Gracias!**





# Theoretical and Practical Pedagogy of Mathematical Music Theory

Music for Mathematics and Mathematics for Music, From School to Postgraduate Levels

<https://doi.org/10.1142/10665> | December 2018

Pages: 324

Edited By: Mariana Montiel (*Georgia State University, USA*) and Francisco Gómez (*Universidad Politécnica de Madrid, Spain*)

[Full Book \(PDF\)](#) [Tools](#) [Share](#)

THEORETICAL AND PRACTICAL  
PEDAGOGY OF MATHEMATICAL  
MUSIC THEORY

Music for Mathematics and Mathematics for Music,  
From School to Postgraduate Levels



Editors  
Mariana Montiel  
Francisco Gómez

World Scientific

Save for later

ISBN: 978-981-3228-34-4  
(hardcover)

\$118.00

ISBN: 978-981-3228-36-8  
(ebook)

\$94.00

Also available at Amazon and Kobo

For institutional ebook prices, contact [sales@wspc.com](mailto:sales@wspc.com)

ISBN: 978-981-3228-35-1

En el transcurso de los últimos 40 years, la teoría matemática de la música (TMM) ha surgido en los departamentos de matemáticas y en las escuelas de música. En el context de la pedagogía de la música, ante la necesidad de analizar los patrones de la composición moderna, se produjo la teoría musical de conjuntos y el uso de la teoría de grupos y otras estructuras matemáticas modernas llegó a ser tan normal como la aplicación de las matemáticas en los departamentos de ingeniería o química.

Los matemáticos encontraban nuevas ideas estimulantes mientras exploraban ciertas relaciones musicales establecidas. Los estudiantes de matemáticas han visto, en estos cursos, cómo su conocimiento acumulado de ideas abstractas pueden aplicarse a una actividad humana importante, en tanto se refuerza su dexteridad en la matemáticas.

De manera similar, cursos de educación general que no exigen una preparación sofisticada en ninguna de las dos disciplinas han sido desarrollados, tanto para los niveles universitario como para los de secundaria y bachillerato así como para fines de divulgación. También se han desarrollado cursos para maestros de secundaria y bachillerato y estudiantes de la educación matemática. Estos cursos se han llevado a cabo en **los EE.UU, China, Irlanda, Francia, Australia y España**. El objetivo de este volumen es el de dar a conocer la motivación y contenido de estos cursos y, como componente esencial, aportar materiales y ejercicios concretos para los lectores interesados en realizar sus propios proyectos .

# *Simetrías*

The image displays a musical score and a diagram illustrating symmetry. The top part shows a piano score in 4/4 time, marked with a tempo of  $\text{♩} = 104$ . The score is divided into two halves by a vertical dashed line, indicating a symmetrical structure. The bottom part shows a single staff with a treble clef, illustrating the symmetry of the melody. The notes are arranged in a series of arcs that are mirrored across a central vertical dashed line, which is labeled  $c''$  at the bottom, representing the axis of symmetry.



Repetición

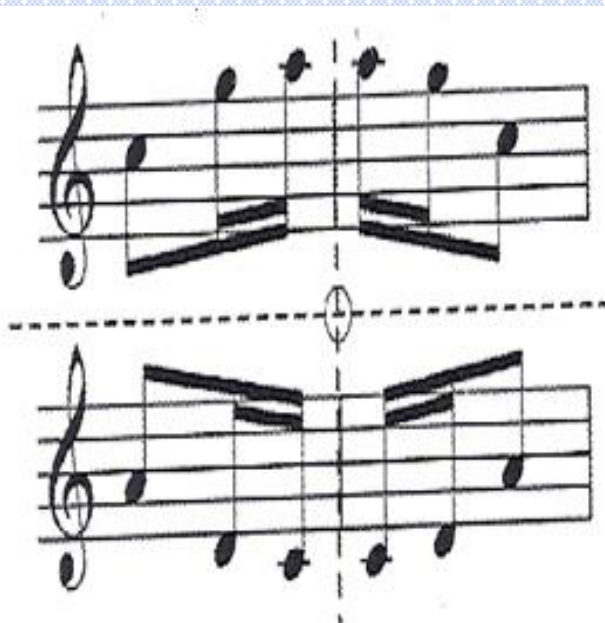
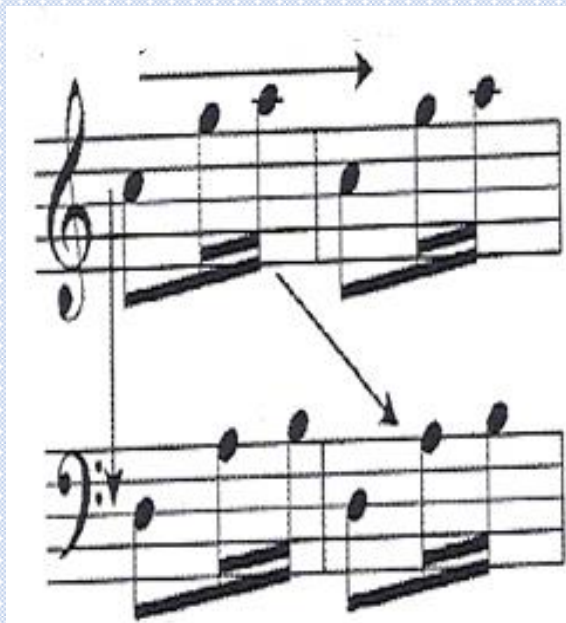
Retrogradación

Inversion y Repetición

Traslación Horizontal

Reflexión Vertical

Reflexión Deslizante Horizontal



Transposicion

Inversión

Retrogradación-Inversión | Retrogradación

Traslación Vertical

Reflexión Horizontal

Rotación 180° | Transposición

Reflexión Deslizante

Vertical

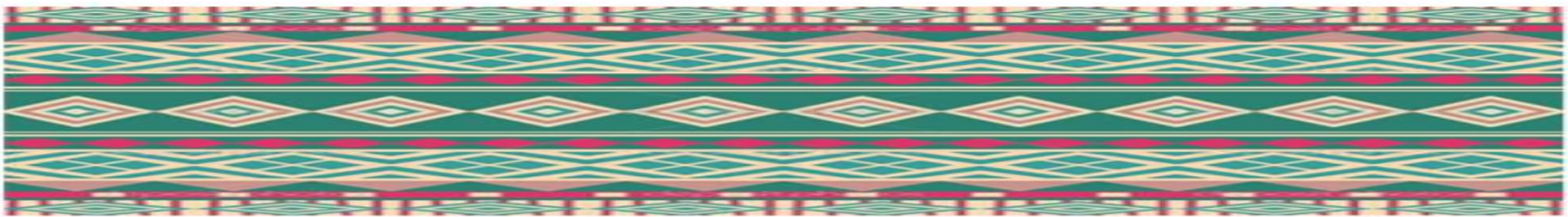


“DICCIONARIO” MÚSICA-MATEMÁTICAS



# Patrones musicales de frisos

- Un **grupo de frisos** es una clasificación matemática de patrones repetitivos unidimensionales basada en las simetrías del patron.
- Tales patrones surgen frecuentemente en la cristalografía, en la arquitectura y en el arte decorativo. **Hay 7 diferentes grupos de frisos.**



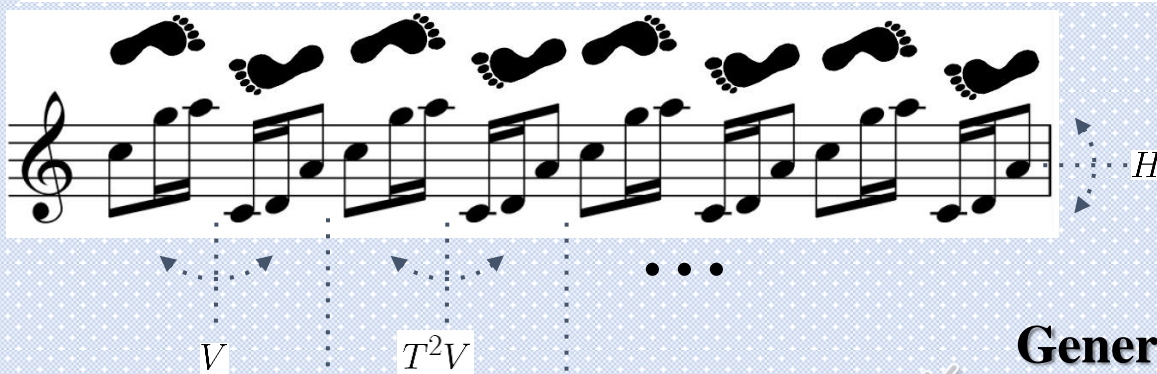


Se le llama *vuelta* si existe una traslación horizontal no trivial  $T$ , una reflexión vertical y una reflexión horizontal de esta combinación tal que:

**p2**

$$S_X = \langle T, HV \mid (HV)^2 = T^0 = 1, (HV)T(HV) = T^{-1} \rangle \cong D_\infty.$$

reflexiones en los ejes horizontal y vertical. Su composición, es decir, aplicar una reflexión y luego la otra, equivale a una rotación de 180°.



Generadores:

**Rotación de 180°**

**Reflexión vertical**

(Retrogradación-Inversión)

**Vuelta**

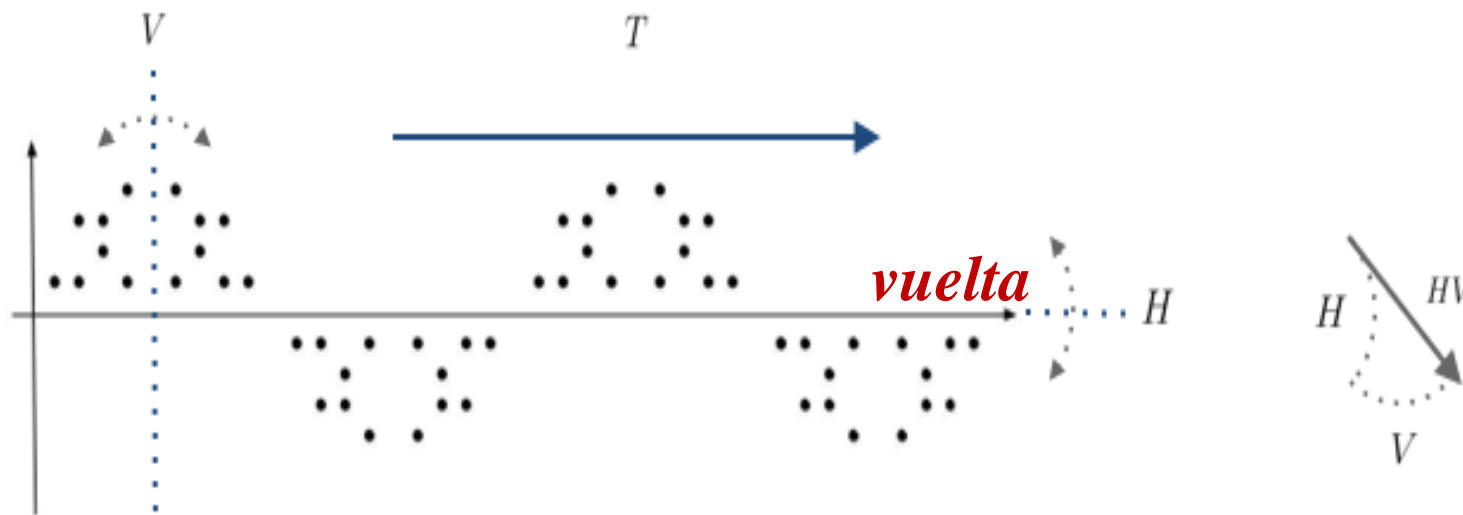


*San Giorgio Maggiore, Venecia, Italia*



spinning hop

$$S_X = \langle T, HV \mid (HV)^2 = T^0 = 1, (HV)T(HV) = T^{-1} \rangle \cong D_\infty.$$



El horizontal en torno a **do**